Μαθημα 18 8/12/2016

Πιθανοτητες

Χαρακτηριστικα τ.μ και Κατανομων

(I) Μεση ή Αναμενομενη τιμη τ.μ

Ορισμος

Εστω μια τ.μ X. Η μεση ή αναμενομενη τιμη της τ.μ X συμβολιζεται με μ ή $E(x)$ και οριζεται:

$$\mu = E(x) = \begin{cases} \sum_{x} x\, p_x(x) & , \text{αν } X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx & , \text{αν } X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

Παρατηρηση

Η $E(x)$ υπαρχει αν το αθροισμα ή το ολοκληρωμα συγκλινουν

Ερμηνεια της $E(x)$

(A) Εστω διακριτη τ.μ X με τιμες $x_1, x_2, \dots, x_n$ και γνωστη σ.π $p_x(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_x(x_i)$$

Εστω $x_{min} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ και $x_{max} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$

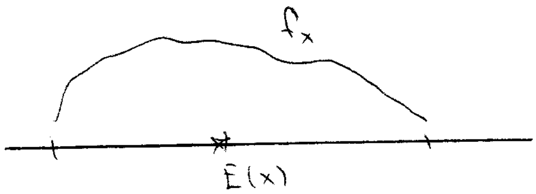
- $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_x(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} x_{max}\, p_x(x_i) = x_{max} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_x(x_i)}_{1} \Rightarrow$

$E(x) \le x_{max}$

- $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_x(x_i) \geq x_{min} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_x(x_i)}_{1} \Rightarrow E(x) \geq x_{min}$

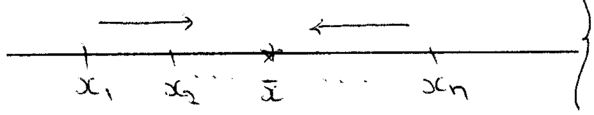
Και τελικα εχουμε οτι

$$x_{min} \le E(x) \le x_{max}$$



(B) Εστω X διακριτη τ.μ με τιμες $x_1, \dots, x_n$ και σ.π $p_x(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$, τοτε

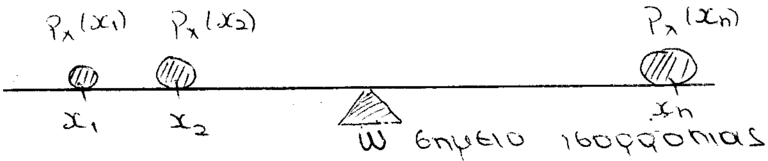
$$E(x) \overset{\text{ορ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_x(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \rightarrow \text{Αριθμ. μεσος}$$



Οι τιμες συγκεντρω-νονται γυρω απο τον αριθμητικο μεσο

(Γ) Συνδεση E(x) με κεντρο βαρους

Εστω τ.μ X με τιμες $x_1, \dots, x_n$ και σ.π $p_x(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$



Αφου ω ειναι σημειο ισορροπιας, τοτε

Η ολικη ροπη στρεψης = 0 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - \omega) p_x(x_i) = 0 \Rightarrow$

$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_x(x_i) = E(x)$

Παραδειγμα

Ζαρι → 2 φορες

Χ = αθροισμα αποτελεσματων 2 ριψεων ενος ζαριου

Υ = απολυτη τιμη διαφορας

$E(X)$, $E(Y)$

απαντηση

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

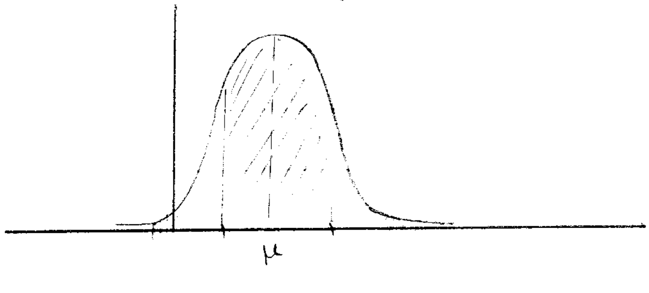
$$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x\, p_X(x) = 7$$

Y	0	1	2	3	4	5
$E(Y)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{5} y\, p_X(y) = 1{,}944$$

Παραδειγμα

Εστω συνεχης τ.μ X με σ.π.π f_X συμμετρικη γυρω απο το a. $(f_X(a+x) = f_X(a-x))$. Αν υπαρχει η $E(X)$ τοτε $E(X) = a$



Κανονικη $E(X) = \mu$

Μεση τιμη συναρτησης τ.μ

Ορισμος

Εστω τ.μ X και g μια πραγματικη συναρτηση. Η μεση τιμη της $g(x)$ συμβολιζεται με $E[g(x)]$ και οριζεται

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, p_x(x) & , X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx & , X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

Ιδιοτητες της Μεσης Τιμης:

Προταση:

Εστω τ.μ X και πραγματικες συναρτησεις g, g_1 και g_2 και σταθερες a, b, τοτε:

1) $E(a) = a$

2) $E[a g(x) + b] = a E[g(x)] + b$

3) $E[a g_1(x) + b g_2(x)] = a\, E[g_1(x)] + b \cdot E[g_2(x)]$

4) Αν $g(x) \geq 0$ τοτε $E[g(x)] \geq 0$

5) Αν $g_1(x) \geq g_2(x)$ τοτε $E[g_1(x)] \geq E[g_2(x)]$

Αποδειξη

2) $E[a g(x) + b] \overset{\text{ορ}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (a g(x) + b) f_X(x)\, dx =$

$$= a \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx}_{1} = a \cdot E[g(x)] + b$$

Παραδειγμα

Φοιτητης απαντα στην τυχη σε 3 ερωτησεις

$+1 \to \Sigma \quad , \quad -1 \to \Lambda$

α) Αναμενομενος αριθμος απαντησεων

β) Αναμενομενο κερδος

απαντηση

Εστω X πληθος σωστων απαντησεων

Εστω Y κερδος

Ζητω $E(X)$, $E(Y) = ?$

$X \sim B(3, \; p = P(\text{σωστο}) = \frac{1}{2})$

$$p_X(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad , \; x = 0, 1, 2, 3$$

$$p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{8} \quad \text{και} \quad p_X(1) = p_X(2) = \frac{3}{8}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x \, p_X(x) = 1,5$$

$$Y = \underset{\substack{\uparrow \\ x=0}}{-3} \; , \; \underset{\substack{\uparrow \\ x=1}}{-1} \; , \; \underset{\substack{\uparrow \\ x=2}}{1} \; , \; \underset{\substack{\uparrow \\ x=3}}{3}$$

Διακριτη μεταβλητη το κερδος

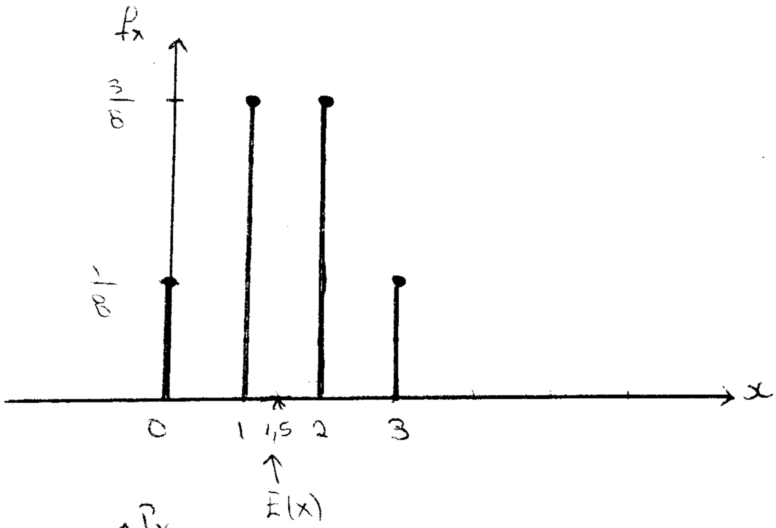
$$p_Y(-3) = p_X(0) = \frac{1}{8}$$

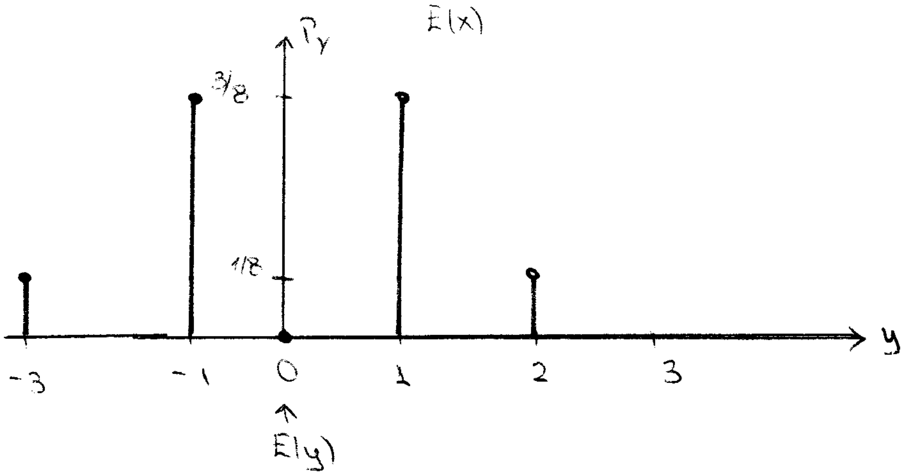
$$p_Y(-1) = p_X(1) = \frac{3}{8}$$

$$p_Y(1) = p_X(2) = \frac{3}{8}$$

$$p_Y(3) = p_X(3) = \frac{1}{8}$$

Αρα $\quad E(Y) = \sum_{y=-3,-1,1,3} y \, p_Y(y) = 0$





(II) Διακυμανση ή διασπορα τ.μ

Ορισμος

Εστω τ.μ X με μεση τιμη $\mu = E(X)$. Η διακυμανση ή διασπορα της X συμβολιζεται με $Var(X)$ ή σ^2 και οριζεται:

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 P_X(x), & X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx, & X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

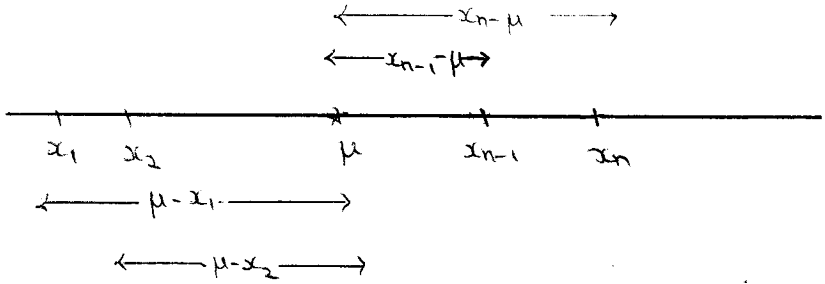
Παρατηρηση

Η $Var(X)$ υπαρχει αν το αθροισμα ή το ολοκληρωμα συγκλινουν.

Ερμηνεια της διακυμανσης

Εστω διακριτη τ.μ X με τιμες $x_1, \dots, x_n$ με σ.π $p_x(x_1), \dots, p_x(x_n)$.

Εστω $\mu = E(X)$. Αν εξιδανικευσω $p_x(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$



$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_x(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$Var(X) = E(|X-\mu|) = \begin{cases} \sum_x |x-\mu| p_x(x), & X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| f_x(x)\, dx, & X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

|| δυσχρηστη

Προταση

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Αποδειξη

$$Var(X) \overset{op.}{=} E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) =$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 =$$
$$= EX^2 - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Προταση

$$Var[g(X)] = E[g(X)]^2 - [E[g(X)]]^2$$

Ιδιοτητες Διακυμανσης

① $Var(a)=0$

② $Var(a g(x)+b) = a^2 \, Var(g(x))$

θυμουμαι

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

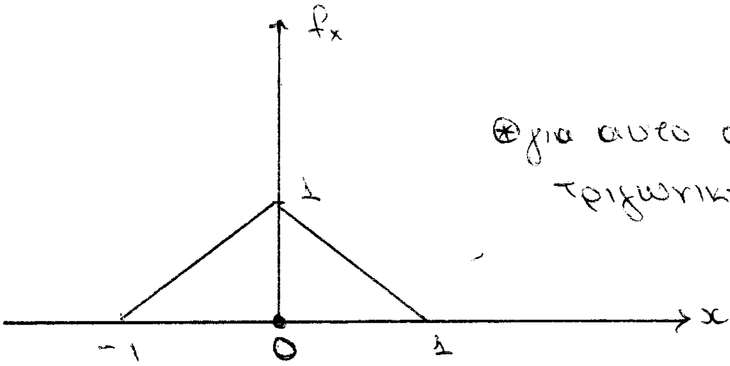
Παραδειγμα

$E(x)$, $Var(x) = ?$

τριγωνικης κατανομης

$$f_x(x) = \begin{cases} 1-|x|, & -1<x<1 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 1+x, & -1<x<0 \\ 1-x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$



⊛ για αυτο ονομαζεται τριγωνικη κατανομη.

απαντηση

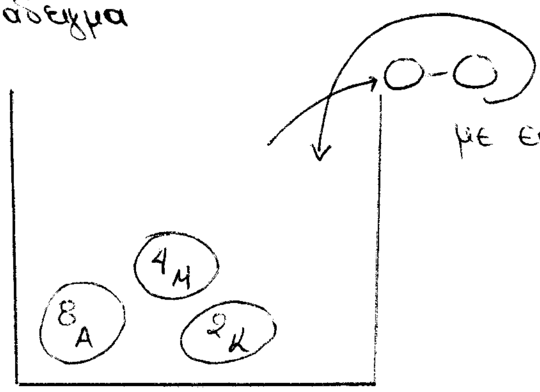
$E(x)=0$ γιατι η κατανομη ειναι συνεχης και συμμετρικη

(ή)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x f_x(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = \dots = 0$$

$$Var(x) = E(x^2) - (Ex)^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f_x(x)\,dx - 0^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f_x(x)\,dx = \dots$$

Παράδειγμα



με επανάθεση

$M \to +2$

$A \to -1$

$K \to 0$

Ένα παιχνίδι λέγεται δίκαιο: δεν αναμένεις ούτε κέρδος ούτε ζημία

Είναι δίκαιο; Διακύμανση κέρδους

απάντηση

Έστω X κέρδος. Ζητώ $E(x)$, $Var(x) = ?$

$AA \xrightarrow{X} -2$

AK ή $KA \xrightarrow{X} -1$

$KK \xrightarrow{X} 0$

MA ή $AM \xrightarrow{X} 1$

MK ή $KM \xrightarrow{X} 2$

$MM \xrightarrow{X} 4$

Άρα τιμές κέρδους X:

$x = -1, 0, 1, 2, 4$

$$P_x(-2) \overset{\text{ορ}}{=} P(x=-2) = P(AA) = P(A)\cdot P(A) = \frac{8}{14}\cdot\frac{8}{14} = \frac{64}{196}$$

$$P_x(-1) \overset{\text{ορ}}{=} P(x=-1) = P(AK \text{ ή } KA) = P(AK) + P(KA) = P(A)\cdot P(K) + P(K)\cdot P(A) =$$
$$= \frac{8}{14}\cdot\frac{2}{14} + \frac{2}{14}\cdot\frac{8}{14} = \frac{32}{196}$$

$$P_x(0) \overset{\text{ορ}}{=} P(x=0) = P(KK) = P(K)\cdot P(K) = \frac{4}{196}$$

$$P_x(1) = \dots = \frac{64}{196}$$

$$P_x(2) = \dots = \frac{16}{196}$$

$$P_x(4) = \dots = \frac{16}{196}$$

Αρα εχουμε:

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{64}{196}, & x=-2 \\ \frac{32}{196}, & x=-1 \\ \frac{4}{196}, & x=0 \\ \frac{64}{196}, & x=1 \\ \frac{16}{196}, & x=2 \\ \frac{16}{196}, & x=4 \end{cases}$$

<u>και</u>

$$E(x) = \sum_{x=-2,-1,0,1,2,4} x \cdot p_x(x) = 0$$

και

$$E(x^2) = \sum_{x=-2,-1,0,1,2,4} x^2 \cdot p_x(x) = 3,4286$$

Συνεπως

$$Var(x) = E(x^2) - \cancel{(Ex)^2}^{\,0} = 3,4286$$

Αρα το παιχνιδι ειναι δικαιο

⊕ $Var(x) \geq 0$